

### Hallar la inversa de la matriz A

Hallar  
 $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_{33}$

#### Solución del ejercicio

Ya es sabido que toda matriz cuadrada tiene determinante, no obstante, no toda matriz posee inversa. Un teorema fundamental indica que si  $|A| \neq 0$  entonces A es invertible, es decir, si el determinante de una matriz es diferente a cero dicha matriz tendrá inversa.

La inversa se define como:  $A^{-1} = A * B = B * A = I$

Donde,  $A^{-1} = B$ , o sea, la inversa de una matriz A es otra matriz B tal que  $A * B = I$ . La matriz identidad. Esto quiere decir que se puede usar una matriz ampliada con la matriz identidad y luego llevar la matriz de la izquierda a identidad a través de operaciones de reducción por renglones. Sin embargo, existen una formula genérica.

Por formula general,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta A)$

Entonces, para matrices de orden 3x3 se puede usar la formula general, donde

$$B = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix} \quad \text{y Adjunta A} = B^T$$

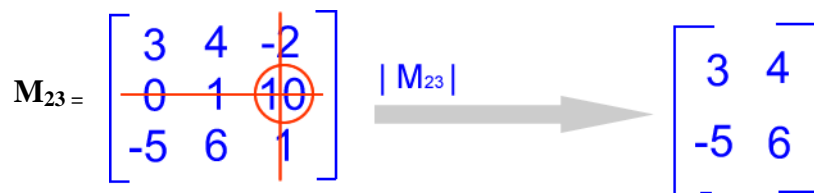
Es decir, B es la matriz de cofactores de la matriz original A y la traspuesta de esta matriz B es la adjunta de la matriz A.

Recuerde la definición de cofactor:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} | \mathbf{M}_{ij} |$$

Donde  $\mathbf{M}_{ij}$  es la matriz menor o matriz interna del elemento  $(i, j)$ . Esta matriz menor se calcula eliminando o cancelando la fila  $i$  y la columna  $j$  y dejando la matriz de los demás elementos. A continuación un ejemplo

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{M}_{23}|} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$



Resumiendo, el cofactor es un valor *escalar* que se halla multiplicando el signo (+1 ó -1) por el determinante de la matriz menor de dicho elemento  $(i, j)$ . Para el cálculo del signo simplemente se eleva la base  $(-1)$  al exponente  $(i+j)$  en caso de ser  $i+j$  par entonces el signo será positivo de lo contrario negativo.

*Continuando con el ejercicio:*

Para hallar  $A^{-1}$  Se proponen cuatro pasos a seguir:

1. Calcular el determinante de  $A$ . (recuerde que si el determinante es cero, entonces la matriz  $A$  no tendrá inversa).
2. Si el determinante es diferente de cero, entonces hallar la matriz  $B$ , es decir la matriz de cofactores de la matriz  $A$ .
3. Hallar la Adjunta de  $A$ , es decir la traspuesta de la matriz de cofactores  $B$ .
4. Aplicar la formula general:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta A)$

Entonces, hallando el determinante  $|A| = -4$

Como el determinante es diferente de cero entonces la matriz A si tiene inversa.  
Continuemos calculando la matriz de cofactores.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 * (-1) = -1$$

$A_{12} = 3$	$A_{13} = -1$	$A_{21} = 2$	$A_{22} = 2$	$A_{23} = -2$	$A_{31} = -1$	$A_{32} = -1$	$A_{33} = -1$
--------------	---------------	--------------	--------------	---------------	---------------	---------------	---------------

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Por ende, } \text{Adj } A = B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} * \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ -3/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$



Puede verificar que  $A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Puede repasar el cálculo de determinantes visitando: <http://tutorias.co/tag/determinantes/>